AZ ÁBEL-FÉLE CSOPORTOK ELMÉLETÉNEK FEJLŐDÉSE HAZÁNKBAN 1945-től

Gécseg Ferenc

matematika-fizika szakos hallgató

BOLYAI INTÉZET

I. §. Bevezetés.

A magyar kutatók több mint hatvan dolgozatot irtak a felszabadulás óta az ABEL-féle csoportokról, amelyek a csoportok szerkezetét és adott tulajdonságnak eleget-tevő csoportok leirását adják. A végtelen ABEL csoportok területén a felszabadulás előtt szinte nem is értek el eredményt. Nagy jelentőségü munkát végzett SZELE professzor által alapitott debreceni algebrai iskola, de rajtuk kivül sok más kutató is belekapcsolódott ebbe a nagyjelentőségü munkába. FUCHS LÁSZLÓ professzor angol nyelven megirt «Abelian Groups» könyve nagyszerüen foglalja össze nemcsak a magyar, hanem a külföldi kutatók eredményeit. A magyar kutatókra külföldön is felfigyeltek, eredményeiket nagyra értékelik, e tény alátámasztására elegendő A.G. KUROS szovjet akadémikusnak könyve magyar kiadásához irt előszavából idézni :«A magyar algebristák vizsgálatai számos kérdésben, különösen pedig az Abel-csoportok elméletében, nagy lendületet vettek az utobbi évek során, és tanui vagyunk annak, miként alakul ki Magyarországon az algebrai kutatásnak egy uj nagy középpontja.» Nem véletlen, hogy KUROS éppen az Abel-csoportok területén végzett kutatásainkat emeli ki. Valóban az elmult időkben a szovjet tudosok mellett a magyarok értek el számottevő eredményeket az Abel-csoportok szerkezetének feltárásában.

Az Ábel-csoportok elméletének fejlődése három részre osztható. Fejlődésük akkor indult meg, amikor észrevették, hogy a véges esetben a kommutativitás feltételezése nagyon leegyszerüsiti a csoport struktúráját, és magával vonja, hogy a csoport ciklikus direkt összegére bomlik. Ez implicite már benne van GAUSS 1801-es dolgozatában, explicite KRONECKER bizonyitotta be 1870-ben. Azt, hogy a ciklikus összeadandók rendjei prímhatványoknak választhatók, 1878-ban bizonyitotta FROBENIUS és STICKELBERGER.

Hosszu ideig nem volt ujabb komoly eredmény. LEVY 1917-ben kezdte meg az általános elmélet kiépitését / a végtelen esetre is./

A második időszak PRÜFER dolgozataival kezdődik /1921-24 /. PRÜFER alapozta meg az Abel csoportok modern elméletét és ő kezdte meg a végtelen Abel-csoportok vizsgálatát.

A harmadik időszak Kulikov két dolgozatával kezdődik /1941-45/. Az általa adott eszmék a tetszőleges számosságu primér Abel-csoportok elméletét fejlesztették ki.

Mielőtt az eredmények részletes tárgyalására rátérnénk, előbb foglaljuk össze a szükséges fogalmakat.

Csoporton a következőkben mindig additiv módon irt Abel-csoportot értünk. Ha α a G csoport valamely eleme, akkor $\{\alpha\}$-val jelöljük az általa generált ciklikus csoportot, amely mindig részcsoportja G-nek. Az $\{U\}$ jelenti az U halmaz által generált csoportot, az U-t a csoport generátorrendszerének nevezzük.

A G csoportot torziócsoportnak nevezzük, ha minden elemének a rendje véges. Ellenkező esetben, vagyis amikor a csoport 0-tól különböző eleme végtelen rendü, torziómentes csoportról beszélünk. Ha vannak véges- és végtelen 0-tól különböző elemei is akkor a csoport vegyes.

A G csoportot $H_1, H_2, \dots H_n$ részcsoportjai direktösszegének nevezzük, ha teljesülnek a következő feltételek :

I./ Bármely két H_i és H_j $(i \neq j)$ részcsoport elemei felcserélhetők.
II./ Bármely $g \in G$ elem egyértelmüen felírható

$$g = h_1 + h_2 + \ldots + h_n$$

összeg alakjában, ahol $h_i \in H_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

A p -edrendü ciklikus csoportot $C(p)$-vel jelöljük és ezt a jelölési módot megtartjuk a végtelen esetben is.

A G csoport $a_1, a_2, \ldots, a_k$ $(a_i \neq 0)$ elemeit lineárisan függetlennek nevezzük, ha az $n_1 a_1 + \ldots + n_k a_k$ / n_i racionális egész/ reláció csak $n_1 a_1 = \ldots = n_k a_k = 0$ esetén állhat fenn.

Legyen H a G -nek olyan részcsoportja, amelyre teljesül a következő feltétel : ha az $nx = h$ $(h \in H)$ egyenlet megoldható G -ben, akkor van olyan megoldás is, mely H -hoz tartozik, ekkor H -t a G szervános részcsoportjának nevezzük.

Legyen G p -csoport. Ha $a \in G$ és k azon s nemnegativ egészn ek legnagyobbika, amelyekre a $p^s x = a$ egyenlet G -ben megoldható x -re, akkor k -t az a elem magasságának nevezzük. Ha nincs ilyen k akkor az a -t végtelen magasságunak tekintjük.

Egy G csoport endomorfizmusán a csoport önmagába való homomorf leképzését értjük. Endomorfizmusok szorzata az az endomorfizmus, amely az egymásutáni végrehajtásukkal áll elö. Az Abel-csoportok endomorfizmusai a közöttük értelmezett összeadás és szorzás alapján gyürüt alkotnak, az u.n. endomorfizmusgyürüt.

2. §. Strukturális vizsgálatok.

A magyar algebristák - sok esetben a szovjet csoportelméleti iskola képviselőinek /KULIKOV, KUROS, stb/ eredményeihez kapcsolódva jelentősen tovább fejlesztették a csoportok struktujára vonatkozó korábbi eredményeket. E téren elsősorban SZELE, FUCHS és KERTÉSZ alkottak maradandót, de mellettük számos fiatal kutató : ERDÉLYI, KOVÁCS, ERDŐS, BOGNÁR stb. is hozzájárult bizonyos strukturális kérdések tisztázásához.

a./ Torzió-csoportok.

Mint ismeretes a torzió - csoportok vizsgálata teljesen visszavezethető a primércsoportok vizsgálatára. Ezért az alábbiakban ismertetendő eredmények mind primércsoportokra vonatkoznak.

Kertész Andor [4] Prüfer Kulikov által általánositott következő tételét fejlesztette tovább : egy megszámlálható p -csoport akkor és csakis akkor bontható fel ciklikus csoportok direktösszegére, ha nem tartalmaz végtelen magasságu elemet. KERTÉSZ legmesszebbmenő eredménye ezen a téren a következő. Nevezzük a G_p -csoport B részcsoportjának P maximális független rendszerét B tartórendszerének, ha P -nek egyetlen eleme sem cserélhető ki nagyobb magasságu B -beli elemmel a függetlenség megsértése nélkül. Mármost egy G_p -csoport akkor és csakis akkor bontható fel ciklikus és kváziciklikus csoportok direktösszegére, ha 1./ G-nek minden végtelen magasságu eleme beágyazható G-nek egy $C(p^{\infty})$ tipusu részcsoportjába és 2./ G tartalmaz oly B részcsoportot, melynek van tartórendszere s a G/B faktorcsoport ciklusösszeg.

Szele Tibor [16] dolgozatának főeredménye az, hogy minden G_p -csoport homomorf módon leképezhető az ő B bázisrészcsoportjára. E tételnek a következményei többek között, hogy egy G_p -csoportnak és bázisrészcsoportjának ugyanazok a ciklusösszegre bontható csoportok a homomorf képei, vagy az a tétel, hogy ha H homomorf képe a G_p-csoportnak, akkor H -nak bázisrészcsoportja homomorf képe G bázisrészcsoportjának.

Szele Tibor [19] a csoportot kvázi-felbonthatatlannak nevezi, ha nem lehet felbontani végtelen ciklikus csoportok direktösszegére. Bebizonyitja, hogy az összes kvázifelbonthatatlan csoportok számossága kisebb vagy egyenlő a kontinuum-számossággal. Kontinuum - számosságu kvázi - felbonthatatlan csoport pl. a $p, p^2, \ldots, p^k$ rendü ciklikus csoportok direktösszege A kerdetesténak torzitórésze /ahol p primszám/.

Bebizonyitja, hogy az A csoport összes direktösszeadandója vagy véges, vagy kontinuum-számosságu, leírja az A csoport összes endomorfizmusát és bebizonyítja, hogy ennek a csoportnak minden endomorfizmusa képe vagy véges, vagy megszámlálhatóan végtelen, vagy kontinuum-számosságu.

Erdélyi Mária [1] általánosította azt az ismert tényt, hogy ha G olyan p -csoport, hogy nem tartalmaz végtelen magasságu elemeket, akkor a G minden eleme belefoglalható a csoportnak egy véges direkt összeadandójába. Erdélyi bebizonyította, hogy tetszőleges $G\,p$ -csoport valamely α eleme akkor és csakis akkor van benne a csoport egy véges direktösszeadandójában, ha az α elem által generált $\{\alpha\}$ ciklikus csoport nem tartalmaz végtelen magasságu elemet.

Fuchs László [8] az m -felbonthatatlan csoportokat vizsgálja. Legyen m tetszőleges kardinális szám. Azt a csoportot /amelynek számossága kisebb m m -felbonthatatlannak nevezzük, ha nem bomlik fel olyan részcsoportok direkt összegére, melyek halmazának a számossága nagyobb vagy egyenlő m . Bebizonyítja, hogy a redukált primér csoportok között akkor és csakis akkor vannak m -felbontható csoportok, amikor vagy létezik olyan kardinális n szám, hogy $n < m \leq n^{\aleph_0}$ vagy létezik kardinális-számoknak olyan $n_1, n_2, \ldots < m$ sorozata, hogy $\sum_{i=1}^{\infty} n_i = m$ megszámlálható.

Tetszőleges m -felbonthatatlan primér csoport számossága nem nagyobb mint $m^{\aleph_0}$. Nem létezik megszámlálható $\aleph_0$ felbonthatatlan redukált primér csoport. Torziócsoport akkor és csakis akkor m -felbonthatatlan, ha minden primérkomponense m -felbonthatatlan, legfeljebb véges számu primérkomponens bázisrészcsoportja m számosságu, mig a többiek számosságának az összege kisebb m -nél.

b./ Torziómentes-csoportok.

Szele Tibor [11] egy PONTRJAGINTÓL származó elégséges feltételére adott uj bizonyítást a tétel következő átfogalmazásában : Egy megszámlálható torziómentes G csoport akkor és csakis akkor ciklus-összeg-ha minden véges r -re teljesül az, hogy G -nek r -edrangu alcsoportjai eleget tesznek a maximum feltételnek.

Bognár Mátyás [1] igen egyszerü példát talált direktfelbonthatatlan másodrangu torziómentes csoportra. Példája a következő : tekintsük a komplex számok additiv csoportjában az

$$\frac{1}{3^n}, \frac{i}{3^n} \; (n=1,2,\ldots) \text{ és } \frac{1+i}{2}$$

elemek által generált részcsoportot. Erről könnyü kimutatni, hogy direktfelbonthatatlan.

Fuchs László [14] olyan példát ad a torziómentes 2^r számosságu csoportra, amelyik nem bomlik fel direktösszegre. A módszer, melyet a példa felépitésénél használ 2^{2^r} fenti tulajdonsággal rendelkező nem-izomorf csoportot ad. A munkában olyan 2^r számosságu csoportra is ad példát, melyik endomorfizmusgyürüje kommutatív.

A munkához MISINA a Referativnüj Zsurnál-ban a következő megjegyzést füzte : A szerző azt mondja, hogy a $p\alpha = g_\lambda$ összefüggésből az ellentmondás következése nem biztos, mivel a G csoportban g_λ osztható lehet p -vel /Például $p=3$ esetben

$$g_\lambda = 3[g_\lambda + 3^{-1}(g_\mu + g_\nu) - 3^{-1}(g_\nu + g_\lambda) - 3^{-1}(g_\lambda + g_\mu)]$$

ehhez hasonlóan tetszőleges páratlan számra./

Azonban könnyü megmutatni, hogy ha $p=2$, akkor g_λ nem osztható p -vel G -ben és akkor az ellentmondást valóban megkapjuk. Annak a bizonyitása, hogy G_λ képe egy η homomorfizmusnál G_λ -ban fekszik, szintén csak $p=2$ esetén adódik.

c./ Vegyes - csoportok.

Erdős Jenő [3] bebizonyitotta a következő tételt : Legyen J megszámlálhatóan végtelen ciklikus csoport teljes direktösszege. Létezik olyan G nemszétesső vegyes-csoport, amelyek torziócsoportja szerinti faktorcsoportja izomorf J -vel.

d./ Egyéb strukturális vizsgálatok.

Szele Tibor [8] egyik dolgozatában egy olyan elmélet alapjait dolgozta ki, melyeknek a csoportok struktura elméletében ugyan az a szerepük, mint a kommutativ testek elméletében a STEINITZ-féle testbővitési elméletnek. Csoportok algebrai és transzcendens bővitése után megmutatja, hogy egy tetszőleges csoportbővités mindig megvalósitható egy tiszta transzcendens és egy azt követő algebrai bővités által. Bármely csoportnak van pontosan egy algebrailag zárt algebrai bővitése. Az algebrailag zárt csoportok ama tulajdonságuknál fogva vannak kitüntetve az összes csoport közül, hogy bármely őket tartalmazó csoportnak direkt komponensei. Egyébként az összes algebrailag zárt csoportok a

$$\Sigma C(p_\nu^\infty) + \Sigma R^+$$

direktösszeg alakjában állnak elő. Ennek az elméletnek egyik eredménye az uj rang-fogalom tetszőleges csoportokra. Több ismert tétel uj és részben élesitett bizonyitása is adódik ebből az elméletből.

Szele Tibor [4] dolgozatában azt a nagy jelentőségü tényt veszi észre, hogyha egy csoport nem torziómentes, akkor feltétlenül van primhatványrendü ciklikus vagy PRÜFER-féle direktösszeadandója.

FUCHS LÁSZLÓ [15] kimutatja, hogy a szervána részcsoportok néhány fontos tulajdonsága átvihető az m-szervána részcsoportra is. A G csoport S részcsoportját m-szervánsnak nevezzük, ha S direktösszeadandó G minden olyan részcsoportjában, amelyre $S \subseteq H$ és H modulo S m-nél kisebb számosságu H-beli elemhalmazzal S generálható. E fogalmat egyébként Gacsályi vetette fel.

Kertész Andor [5] észrevészi, hogy bizonyos dualitás észlelhető a csoportok elméletében, melynél a szabad és teljes csoportok felelnek meg egymásnak. Ennek a dualitásnak uj illusztrálásaként bemutatja, hogy minden A csoport akkor és csakis akkor teljes /szabad/ csoport amikor izomorf tetszőleges olyan csoportnak valamely faktorcsoportjával /részcsoportjával/, amelynek részcsoportja /faktorcsoportja/.

Bebizonyitja még a következő önduálitást : csoport, melynek H olyan részcsoportja, hogy endomorf képe is, akkor és csakis akkor rendelkezik H -val izomorf direktösszeadandóval, amikor a H szabad és teljes csoportok direktösszege.

A szerző megjegyzi, hogy ilyen analóg dualitás nem minden kommutatív csoportra érvényes.

3. §. Adott tulajdonságu csoport-osztályok meghatározása.

A végtelen csoportok szerkezete csak igen kevés esetben ismeretes. Különösen vonatkozik ez a vegyes csoportokra. Épp ezért a kutatók olyan módon igyekeztek meghatározni az általános vegyes csoportok szerkezetét, hogy először bizonyos speciális feltételeket kielégítő csoportok szerkezetét meghatározzák. Az ilyen vizsgálatok többek között néhány fontos csoport tipus $(C(p^{\infty}), R^{+})$ ujabb érdekes jellemzését is szolgáltatták.

Szele Tibor és Szélpál István [1] közös dolgozatukban azt a kérdést vizsgálják, hogy melyik csoportok nem képezhetők le homomorf módon nemtriviális részcsoportjukra. Arra az eredményre jutnak, hogy az ilyen csoport a $C(p)$, $C(p^{\infty})$, R csoportok valamelyikével izomorf.

Fuchs László, Kertész Andor és Szele Tibor [1] megadják az önduális csoportok teljes leirását. A G csoportot S-F duálisnak nevezzük a H csoporttal, ha G minden részcsoportjához van H -nak vele izomorf faktorcsoportja és a H minden faktorcsoportja izomorf G legalább egy részcsoportjával. Kimutatták, hogy :

Megszámlálható csoport nem lehet torziómentes.

Megszámlálható p csoport akkor és csakis akkor önduális, ha vagy korlátosrendü, vagy nem korlátosrendü redukált p csoport és végtelensok p^{∞} tipusu csoport direktösszegére bomlik.

Torziócsoport akkor és csakis akkor önduális, ha minden primérkomponense önduális.

Megszámlálható végtelenrangu vegyescsoport akkor és csak is akkor önduális, ha felbontható valamilyen részcsoportjának és végtelensok olyan csoportnak a direktösszegére, amelyek izomorfak a Z csoporttal, ahol Z

az összes racionális szám additív csoportjának, a végtelen ciklikus csoportnak és R -nek a racionális egész számok részcsoportja szerinti faktorcsoportjának a direktösszege.

Megszámlálható a végesrangu vegyes csoport akkor és csakis akkor önduális, ha felbontható véges számu végtelen ciklikus csoportra és olyan torziócsoport direktösszegére, amelynek minden primérkomponense nem korlátosrendü önduális p -csoport.

FUCHS L., KERTÉSZ A. és SZELE T. [3] dolgozata azokat a G csoportokat vizsgálja, amelyekre G tetszőleges részcsoportja endomorf képe G -nek.

Megmutatják, hogy a G_p csoportra ekvivalensek a következő állítások :

a./ G az említett tulajdonságu csoport.

b./ G -nek és tetszőleges bázisrészcsoportjának finit rangmegegyezik.

c./ A G csoportnak a B bázisrészcsoportja homomorf képe.

Ezekből folyik, hogy megszámlálható P csoport akkor és csakis akkor nem rendelkezik a fenti tulajdonsággal, ha korlátos rendü és p^{∞} tipusu csoportok nem üres halmazának a direktösszege.

Legyen r a G nem-torziócsoport torziórészcsoportja szerinti faktorcsoportjának a rangja. A G csoport akkor és csakis akkor az előbbi tulajdonságu, ha a./ véges r esetén G véges számu végtelen ciklikus csoport és az említett tulajdonságu torziócsoport direktösszege, b./ végtelen r esetén G rendelkezik r rangu szabadcsoport direktösszeadandóval és G torziórészcsoportjának minden T_i primérkompnense, amelynek finitrangja nagyobb mint r az említett tulajdonságu p_i csoport.

Ezeken kivül a G csoport akkor és csakis akkor a fenti tulajdonságu, ha G -nak tetszőleges direktfelbontható ciklikus részcsoportja a G -nak endomorf képe.

FUCHS LÁSZLÓ [11] megmutatja, hogy melyek azok a csoportok, amelyeknek univerzális homomorf képük létezik és azokat, amelyeknek univerzális részcsoportjuk létezik.

A G csoport U homomorf képét univerzálisnak nevezzük, ha a G csoport minden H homomorf képe részére az U -ban van olyan részcsoport, amelyik izomorf H -val. Bebizonyitja, hogy az összes torziócsoport univerzális homomorf képe létezik. Ennél, ha a G csoport primér a p primszám szerint és a finitrangja m -mel egyenlők, akkor $G = G_1 + G_2$ ahol G_1 olyan csoport, hogy elemei rendjének összességében korlátos, a G_2 olyan, hogy rangja egyenlő a G csoport finit rangjával. A G univerzális homomorf képe az $U = G_1 + \sum C(p^\infty)$ csoport. Itt $C(p^\infty)$ a p^∞ tipusu csoport.

Továbbá megmutatja, ha a G csoport T torziórésze szerinti faktorcsoportjának rangja $w \geq 1$ akkor a G csoport univerzális részcsoportja akkor és csakis akkor létezik, amikor az w rang vagy végtelen, vagy véges ugyan, de a G/T csoport összes primérkomponensének a finit rangja végtelen, a G/T faktorcsoport pedig $G/T = R(G_1) + \dots +_w R(G_w)$ alaku, ahol $R_i(G_i) - G_i$ tipusu 1 rangu torziómentes csoport és

$$G_1 \geq \dots \geq G_w$$

A G csoport Z részcsoportját univerzálisnak nevezzük ha a G összes többi részcsoportjának homomorf képe. Bebizonyitja, hogy a primér csoport akkor és csakis akkor, rendelkezik univerzális részcsoporttal, amikor a finit rangja vagy 0 vagy ∞ .

A torziócsoport akkor és csakis akkor rendelkezik univerzális részcsoporttal, amikor az összes primérkomponense rendelkezik ilyen részcsoporttal.

Ha a G csoport torzió szerinti faktorcsoportjának rangja $w \geq 1$ akkor a G akkor és csakis akkor rendelkezik univerzális részcsoporttal, ha az w vagy véges vagy pedig a T rendelkezik univerzális részcsoporttal, a G csoport maga pedig $G = T + \sum_{w} C(\infty)$ alaku, ahol, $C(\infty)$ végtelen.

4. §. A csoport- és gyürüelmélet határterületén.

A magyar matematikusok a felszabadulás óta komoly eredményeket értek el a csoportelmélet következő három területén, amelyek egyébként a csoport- és gyürüelmélet határterületének is tekinthető, mivel az ide vonatkozó kutatások mindkét elmélet módszereit felhasználják és a kapott eredmények mindkét elmélet szempontjából jelentősek. E területek : a./ az operátormodulusok elmélete, b./ adott tulajdonságu endomorfizmusgyürüvel rendelkező csoportok meghatározása, c./ adott tulajdonságu csoportra épithető gyürüknek, illetve adott tulajdonságu gyürük lehetséges additiv csoportjainak vizsgálata.

Bár ezek a vizsgálatok egymáshoz közelállóknak tünhetnek, hiszen például az R gyürü feletti operátormodulus lényegében olyan csoportot jelöl, amelynek endomofrizmusgyürüje tartalmazza R egy homomorf képét, továbbá egy R gyürü additiv csoportja nyilván R modulusnak tekinthető, mégis a kutatásnak ez a három területe a gyakorlatban messze ágazik egymástól, egészen különböző módszereket használ fel, azért indokolt az egymástól szétválasztva való tárgyalásuk.

Az operátormodulusok elméletében Szele Tibor és Kertész Andor munkássága kiemelkedő.

SZELE TIBOR [17] dolgozatában bebizonyitja, hogy ha R egységelemes gyürü és M unitér R mondulus, akkor az M részmodulusaira vonatkozó minimum és maximum feltételből folyik M végessége, ha R maximális balideáljai véges indexüek R -ben. Ez általánositása annak az ismert tényeknek, hogy a minimum és maximum feltételnek elegettevő csoport véges és itt jegyezhetjük meg, hogy a magyar kutatások az operátormodulusok területén általában hasonló jellegü problémákkal foglalkoznak : a csoportelmélet ismert eredményeit igyekeznek kiterjeszteni az operátormodulusok minél szélesebb osztályaira.

KERTÉSZ ANDOR doktori disszertációjában jelentős lépést tesz előre a korábbi eredményekhez képest, amikor elejti az operátortartományul szolgáló gyürü egységelemességét. Tetszőleges operátor-modulus esetét ugyanis vissza tudja vezetni egységelemes operátorgyürüvel rendelkező modulus vizsgálatára, megmutatva, hogy tetszőleges R gyürünek létezik olyan R_1 egységelemes bővitése, hogy bármely MR -modolus esetén R_1 ugy rendelhető R -hez operátortartományként, hogy M unitér R_1 modulus legyen, R elemei pedig változatlanul hassanak. Azt is megmutatja, R bármely minimális fenti tulajdonságu bővitése ekvivalens R közönséges /Dorroh- féle/ R^* egységelemes bővitésével. Megemlithatők a következő alkalmazások : az a triviális tény, hogy a csoport bármely O rendü eleme által generált részcsoport torziómentes és benne bármely két a, b O-tól különböző eleme $\{a\} \cap \{b\} \neq O$ R modulusokra akkor és csakis akkor érvényes, ha R^* zérusosztómentes és bármely két O -tól különböző balideáljának metszete különbözik O -tól. Igen érdekes még C. I. EVERETT egy szabadmodulusokra vonatkozó tételének következő általánositása : A tetszőleges R gyürü akkor, és csakis akkor olyan, hogy bármely m szabadrangu szabad R modulus bármely részmodulusa is szabad és szabad rangja nem nagyobb m -nél, ha R^* zérusosztómentes baloldali főideálgyürü.

KERTÉSZ további kutatásai a modulusok feletti egyenletek elméletére, valamint a teljesen redukálható / egyszerü modulusok direktösszegére bontható/ modulusok jellemzésére vonatkoznak. KERTÉSZ nevéhez füződik többek között egy érdekes radikál fogalom a modulusok elméletében, amely rokonságot mutat egyrészt a FRUTTINI-féle részcsoporttal, másrészt a gyürüelméleti JACOBSON féle radikállal.

Áttérve az adott tulajdonságu endomorfizmusgyürüvel rendelkező csoportokra vonatkozó vizsgálatok áttekintésére és a következő értékes eredményeket kell megemlitenünk :

SZELE TIBOR és SZENDREI JÁNOS I11 bebizonyitották, hogy egy torziócsoport endomorfizmusgyürüje akkor és csakis akkor kommutatív, ha a csoport izomorf az összes komplex egységgyökök csoportjának egy részcsoportjával. Jelentős eredményeket értek el vegyes csoportokra vonatkozóan is.

RÉDEI LÁSZLÓ és SZELE TIBOR I11 dolgozatukban megmutatták, hogy egy elsőrangu torziómentescsoportra épitható gyürü vagy zérógyűrű vagy a racionális számtestnek egy / a dolgozatukban közelebbről meghatározott/ részgyürüjével izomorf.

Végül megemlitendő SZELE TIBOR alábbi két eredménye. I18 I Egy G csoportra akkor és csakis akkor épithető balideáljaira nézve minimum feltételnek eleget tevő nilpotens gyürü /ARTIN-féle gyürü/, ha a G részcsoportjaira nézve eleget tesz a minimum feltételnek.

A G csoportra akkor és csakis akkor épithető balideáljaira nézve maximum feltételnek elegettevő nilpotens gyürü /NOETHER gyürü /, ha a G részcsoportjaira nézve maximum feltételnek tesz eleget.

5. §. A Hajós-tétel és általánositásai.

A HAJÓS- tétel MINKOWSKI egy olyan sejtésének bizonyitása során jött létre, amely azelőtt egy fél évszázadon keresztül dacolt a legkiválóbb matematikusok sokirányu bizonyitási kisérleteivel. A tétel geometriai megfogalmazása - amely MINKOWSKITÓL származik- a következő : Nevezzük pontrácsnak az n -dimenziós euklidesi térben olyan csupa izolált pontokból álló ponthalmazt, amely önmagába megy át minden olyan transzlációnál, melyet a halmaz két pontja által meghatározott vektor definiál. Továbbá, nevezzük egyszeresen térfedő kockarácsnak csupa egybevágó kockák olyan halmazát ugyancsak az n -dimenziós térben, amelyre érvényesek a következők : a tér bármely pontja hozzát tartozik a halmaz legalább egy kockájához, de a halmaz két különböző kockájának soha sincsen közös belső pontja : továbbá a halmazhoz tartozó kockák középpontjai pontrácsot alkotnak. A tétel mostmár igy szól : egyszeresen térfedő kockarács mindig oszlopozott, azaz tartalmaz két olyan szomszédos kockát, amelyek egy $n-1$ -dimenzióju oldallapja teljes egészében közös.

A HAJÓS-féle csoportelméleti tétel megfogalmazása céljából tekintsünk egy G véges csoportot. A és B jelölje két tetszőleges komplexusát G -nek. Ha a G bármely eleme pontosan egyféleképpen állitható elő egy A -beli és egy B -beli elem szorzataként, akkor azt mondjuk, hogy a G az A és B komplexusok szorzata : $G=A\cdot B$. Nevezzük a G csupa különböző elemekből álló és

$$[\alpha]_n=[1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}]$$

alaku komplexusait szimplexnek. Az α^n a szimplex záróeleme. Ez nyilván akkor és csak akkor eleme a szimplexnek, ha $\alpha^n=1$ vagyis, ha a szimplex csoport. Mármost a HAJÓS-féle csoportelméleti tétel l l l igy szó. : Ha egy G véges csoportot előállitunk szimplexek szorzataként, akkor a szimplexek egyike okvetlenül csoport.

HAJÓS tételét 1942-ben publikálták. A világ minden részén felfigyeltek rá a matematikusok, de HAJÓS bizonyitása mindmáig lényegében az egyetlen. Továbbhaladni főképpen csak HAJÓS bizonyitásának technikai egyszerüsitésében sikerült, azonban a HAJÓS-TÓL származó döntő gondolatokat megtartották. Ezek az eredmények is magyar matematikusoknak, elsősorban RÉDEI LÁSZLÓ-nak köszönhetők.

Ezzel a problémával kapcsolatban a következő magyar eredmények láttak napvilágot.

RÉDEI LÁSZLÓ I2I, I3I, I4I és I5I HAJÓS tételére uj bizonyitást nyert, amely a p csoportok esetére egészen egyszerü, de a bizonyitásnak az általános esetére való kiterjesztése nehézkes. A p -csoportokról szóló rész bizonyitása a következő érdekes tételen nyugszik. Ha $\mathcal{G}$ csoport rendje p^n és az $\alpha_1, \dots, \alpha_n (\in \mathcal{G})$ elemek $\mathcal{G}$ -t generálják, továbbá közülük bármely k számu elem legalább p^k rendü részcsoportot generál $(1 \leq k \leq n-1)$ akkor az $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ elemeket alkalmas hatványra emelve, majd e hatványokat alkalmas sorrendbe irva, olyan $u_1, u_2, \dots u_n$ sorozat áll elő, hogy az első k tag által generált csoport rendje éppen $p^k (1 \leq k \leq n)$ Ebből a tételből $J(\mathcal{G})$ az gyürü felhasználásával korolláriumként nyerhető HAJÓS tételének p csoportokra vonatkozó része.

RÉDEI LÁSZLÓ [7], [9] a csoportokat illetően ujszerü vizsgálatokat folytatott, amire HAJÓS tétele inditotta. Jelöljön $n (> 0)$ egész számot és legyen N az $1, 2, \dots n$ számok halmaza. Tekintsük a $\mathcal{G}$ csoport tetszőleges $A_1, \dots A_n$ részcsoportjait. Bármely $M (\subseteq N)$ halmaz esetén jelölje A_M az $A_i \ (i \in M)$ részcsoportok szorzatát. Az (A_M) $(M \subseteq N)$ rendszámok rendszere ($n \geq 3$ esetén) igen nehezen áttekinthető. Azért, hogy e rendszerről felvilágositást nyerjen bevezette a

$$\varsigma(z) = \varsigma(z; A_1, \dots, A_n) = \sum_{M \subseteq N} (-1)^{(M)} (A_M)^{-z}$$

függvényt z komplex változóval. Ebben feltünő, hogy ha a tetszőleges, az egész számoktól különböző 1- -nél nagyobb pozitiv szám, akkor $\varsigma(z)$ sem alulról, sem felülről nem korlátos. Bizonyos esetekben $\varsigma(z)$ az $A_1, A_2,$ végtelen rendszere is definiálható, s lehetséges egyéb strukturákra való kiterjesztése is. A megfelelő $\zeta = \varsigma(z)^{-1}$ függvények a Riemann-féle zetafüggvények általánositásai. Hajós tétele ekvivalens azzal, hogy bizonyos speciális zeta-függvények a $z = 1$ helyen való polusos voltából következik, ugy ugyanazoknak a $z = 2, 3, \dots$ helyeken is pólusa van.

SZELE TIBOR is bele kapcsolódott a HAJÓS-féle csoportelméleti tétel egyszerüsitésére vonatkozó vizsgálatokba. Dolgozatába RÉDEI professzor egyszerü bizonyitásán további egyszerüsitést hajt végre. HAJÓS és RÉDEI bizonyitásában két segédtétel játszik komoly szerepet, amelyet ők a csoport algebra felhasználásával bizonyitanak. SZELE egyszerüsitésének lényege az, hogy az egyik segédtétel kiiktatható, sőt a bizonyitás egyes lépéseinek átrendezésével további egyszerüsités is végezhető. Csoportalgebrai módszert csak az egyik segédtétel bizonyitásánál használ fel.

Név és irodalomjegyzék :

Bognár M. [1] Ein einfaches Beispiel direkt unzerlegbarer abelscher Gruppen, Publ.Math. Debrecen, [illegible]/1956/, 509-511.

Erdélyi M. [1] Direct summands of abelian torsion groups, Acta Univ. Debrecen, 2/1955/, 145-149. /Hungárian/.

Erdős J. [1] On direct decompositions of torsion free abelian groups, Publ. Math. Debrecen, 3/1954/, 281-288.- [2] Torsion free factor groups of free abelian groups and a classification of torsion-free abelian groups. Publ. Math. Debrecen, 5/1957/, 172-184.- [3] On the splitting problem og mixed abelian groups. Publ. Math. Debrecen, 5/1958/, 364-377.

Fuchs L. [1] On subdirect unions. I. Acta. Math. Acad. Hung. 3/1952, 103-120.- [2] Ob abelevüh gruppah, v kotorüh klasszü izomorfnü szobsztvennüh podgrupp szoderzsát odinokovoje csiszló-podgrupp. Csehoszl. Mat. Zaurn. 2/77/ /1952/. 387-390. - [3] The direct sum of cyclic groups. Acta. Math. Acad. Sci. Hung. 3/1952/ 177-195.- [4] A simple proof of the basic theorem for finite abelian groups. Norske Vid. Selsk. Forh. 25/1952/. 117-118.- [5] On the Stucture of abelian p-groups. Acta. Math. Acad. Sci. Hung. 4/1953/. 267-288.- [6] On a special kind of duality in group theory. II. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 4/1053/. 299-314.- [7] On a property of basic subfroups. Acta. Math. Acad. Sci. Hung. 5/1954/. 143-144.- [8] On abelian torsion groups whict cannot be represented as the direct sum of a given cardinal number of components. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 7/1956/. 115-124.- [9] Ringe und ihre additive Gruppe. Publ. Math. Debrecen. 4/1956/ 488-508/. - [10] On a useful lemma for abelian groups. Acta Sci. Math. Szeged. 17/1956/. 134-138.- [11] Über universale homomorphe Bilder und universale Untergruppen von abelschen Gruppen. Publ. Math. Debrecen. 5/1957./ 185-196.- [12] On quasi nil groups. Acta Sci. Math. Szeged. 18/1957/. 33-43.- [13] Über das Tensorprodukt von Torsionsgruppen. Acta Sci. Math. Szeged. 18/1957/. 29-32.- [14] On a directly indecomposable abelien group of power greater than continuum. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 8/1957./ 453-454. [15] On generalized pure subroups of abelian groups Annales Univ.

Sci. Budapest. 1/1958/ 41-47.- [16] Wann folgt die Maximalbedingung aus der Minimalbedingung? Archiv d. Math., 8/1957/ 317-319.- [17] Ein kombinatorisches Problem bezüglich abelscher Gruppen. Math. Nachrichten. 18/1958/ 292-297.- [18] On the possibility of extending Hajós theorem to infinite abelian groups. Publ. Math. Debrecen. 5/1958/ 338-347.

Fuchs L.- Kertész A.- Szele T. [1] On a special kind of duality in group theory. I. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 4/1953/. 169-178.- [2] Abelian groups is a which every serving subgroup is a direct summand. Publ. Math. Debrecen. 3/1953/. 95-105. - [3] On abelian groups whose subgroups are endomorphic images. Acta Sci. Math. Szeged. 16/1955 77-88.- [4] On abelian groups in which every homomorphic image can be imbedded. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 7/1956/. 467-475.

Fuchs L.- Szele T. [1] Abelian groups with a unigve maximal subgroup Magy. Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl. 5/1955/ 387-389. [2] On artinian rings. Acta. Sci. Math Szeged. 17/1956/ 30-40.

Gacsályi S. [1] On algebrically closed Abelian groups. Publ. Math. Debrecen 2/1952/. 292-296.- [2] On pure subgroups and direct summands ot abelian grpups. Publ. Math. Debrecen. 4/1955/. 89-92.

Hajós G. [1] Über einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalem Raumes mit einem Würfelgitter. Math. Zschrift. 47/1942/ 427-467.- [2] Sur la factorisation des proupes abeliens Casopis Pest. Math. 74/1950/ 157-162.- [3] Sur le probleme de factorisation des groupes cycliques. Acta. Math. Acad. Sci. Hung. 1/1950/ 189-195.

Kertész A. [1] [illegible] groups every subgroup of which is a direct summand. Publ. Math. Debrecen 2/1951/ 74-75.- [2] On the decomposibility of abelian p-groups into the direct sum of cyclic groups. Acta Math. Akad. Sci. Hung. 3/1952/ 225-232.- [3] On fully decomposable abelien torsion groups. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 3/1952/ 225-232.- [4] On a theorem of Kulikov and Dieudonné. Acta Math. Sci. Szeged. 15/1953 / 61-69.- [5] On subgroups and homomorphic images. Publ. Math. Debrecen. 3/1953/ 174-179.- [6] The general theory of linear equation systems over semisimple rings. Publ. Math. Debrecen. 4/1955/ 79-86.- [7] Beitrage zur Theorie Operátormoduln. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 8/1957/ 235-257.- [8] Systems of equations over modules. Acta Sci. Math. Szeged. 18/1957/. 207-234.

Kertész A.- Szele T. [1] On abelien groups evry multiple og Which is a direct summand. Acta Sci. Math. Szeged. 14/1952/ 157-166.- [2] Abelian groups everyyfinitely generated subgroup of which is an endomorphic image. Acta Sci. Math. Szeged. 15/1953/. 70-76.- [3] On generalised p-groups. Acta Univ. Debrecen. 2/1955/. 1-5.

Rédei L. [1] Über den Fundamentalsatz der abelschen Gruppen von endlicher

Ordnung. Acta Sci. Math. Szeged. 10/1941/ 109-111.- [2] Vereinfachter Beweis des Satzes von Minkowski-Hajós. Acta Sci. Math. Szeged. 13/ 1949/ . 2 - 35./ -[3] Die Reduktion des gruppentheorischen Satzes von Hajós auf den Fall von p-Gruppen. Monatshefte. Math. 53/1949/ 221-226.- [4] Kurzer Beweis des gruppentheoretischen Satzes von Hajós. Comm. Math. Helv., 23/1949/ 272-282.- [5] Ein Beitrag zum Problem der Factorization von endlichen abelschen Gruppen. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1/1950/ 197-207.- [6] Über die Ringe mit gegebenem Modul. Acta Sci. Math. Szeged. 15/1954/ 251-254.- [7] Zetafunktionen in der Algebra. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 6/1955/ 5-25.- [8] Neuer Beweis des Hajósschen Satzes über die endlichen abelschen Gruppen. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 6/1955/ 27-40.-[9] Die gruppentheoretischen Zetafunktionen und der Satzvon Hajós. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 6/1955/ 271-279.

Rédei L.- Szele T. [1] Die Ringe «ersten Ranges». Acta Sci. Math. Szeged. 12 A /1950/ 18-29.

Szász F. [1] On groups every ciclyc subgroup of which is a power of the group. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 6/1955/ 475-477. - [2] Über Gruppen deren sämtliche micht-triviali Potenzen zyklische Untergruppen der Gruppe sind. Acta Sci. Math. Szeged. 17/1956/. 83-84.- [3] On cycliy groups. Fundamenta Math. 43/1956/ 238-240.

Szele T. [1] Über Die directen Teiler der endlichen abelschen Gruppen Comm. Math. Helv. 22/1949/ 117-124. - [2] Die abelschen Gruppen ohne eigentkuche Endomorphimen. Acta Sci. Math. Szeged. 13/1949/ 54-56.- [3] Neuer vereingachter Beweis des gruppenteoretischen Satzes von Hajós. Publ. Math. Debrecen. 1/1949/ 56-62.- [4] Sur la décomposition des groupes abeliens. C. R. Acad. Sci. Paris. 229/149/ 1052-1053.- [5] Zur Theorie der Zeroringe. Math. Ann. 121/1949/ 242-246.- [6] Über die abelschen Gruppen mit nullteilerfreiem Endomorphismenring. Publ. Math. Debrecen. 1/1949/ 89-91.- [7] Gruppentheoretischen Beziehungen der Primkörper. Mat. Aineiden Aikakauskirja. 13/1949/ 80-85.- [8] Ein Analogon der Körpertheorie für abelsche Gruppen. Journ. Reine u. angew. Math. 188/1950/ 167-192.- [9] Gruppentheoretische Beziehungen bei gewissen Ringkonstruktionem. Math. Zschrift. 54/1951/ 76-78.- [10] On direct sums of cyclic groups. Publ. Math. Debrecen. 2/1951/ 76-78.- [11] On a theorem of Pontrjagin. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 2/1951/ 121-123.- [12] On groups With atomic layers. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 3/1952/ 127-129.- [13] On non-countable abalian p-groups. Publ. Math. Debrecen. 2/1952/ 300-301.- [14] On direct sums of cyclic groups whit one amalgamated subgroup Publ. Math. Debrecen. 2/1952/ 302-307.- [15] On direct decompositions of abelian groups. Joura. London. Math. Soc. 28/1953/ 247-250.- [16] On the basic subgroups of abelian p-groups . Acta. Math. Acad. Sci. Hung. 5/1954/ 129-141.- [17] On a finiteness crition for modules. Publ. Math. Debrecen. 3/1954/ 253-256.- [18] Nilpotent Artinian rings. Publ.

Math. Debrecen 4/1955/ 71-78.- [19] On quasiindecomposable abekian torsion groups. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 7/1956/ 109-114.- [20] On a topology in endomorphism rings of abelian groups Publ. Math.-Debrecen, 5/1957/ 1-4.-

Szele T.- Szélpál I. [1] Über drei wichtige Gruppen. Acta Sci. Math. Szeged. 13/1950/ 192-194.

Szele T. Szendrei J. [1] On abelian groups with commutative endomorphizm ring. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 2/1951./ 309- 324.

Szélpál I. [1] Die abeschen Gruppen ohne eigintliche Homomorphismen Acta Sci. Math. Szeged. 13/1949/ 51-53.- [2] Die unendlichen abelschen Gruppen mit lauter endlichen echten Untergruppen. Publ. Math. Debrecen. 1/1949/ 63-64.- [3] The abelian groups with torsion-free endomorphism ring. Publ. Math. Debrecen. 3/1953/ 106-108.